

方法总结

含参分式方程中的整数解问题常常要用到整除的相关知识,即如果分式的值是整数,那么分母必为分子的因数.

(1)当分子为常数时,找出分子的因数即可求出未知数.

例:若 $\frac{4}{a}$ 为整数,则 $a = \pm 1, \pm 2, \pm 4$.

(2)当分子含有未知数时,需用分离常数法将分子化为常数.

例:若 $\frac{3x}{x-1}$ 为整数,则 $\frac{3x}{x-1} = \frac{3(x-1)+3}{x-1} = 3 + \frac{3}{x-1}$, 所以 $x-1 = \pm 1, \pm 3$, 则 $x = 2, 0, 4, -2$.

思路分析

先解分式方程整理得到 $(k+1)x = 6$, 再根据分式方程无解得到 $k+1 = 0$ 或 $\frac{6}{k+1} = 2$, 解关于 k 的方程即可得到答案.

全章综合训练



1. A 【解析】 \because 分式 $\frac{x^2-x}{x-1}$ 的值为 0, $\therefore x^2-x=0$

且 $x-1 \neq 0$, 解得 $x=0$, 故选 A.

2. $x \neq 19$ 【解析】由题可知, 当 $x-19 \neq 0$ 时, 分式有意义, 解得 $x \neq 19$. 故答案为 $x \neq 19$.

3. A 【解析】原式 $= \frac{3x-3}{x-1} = \frac{3(x-1)}{x-1} = 3$. 故选 A.

4. A 【解析】 \because 计算 $\frac{A}{xy+y^2} - \frac{y}{x^2+xy}$ 的结果为 $\frac{x-y}{xy}$, $\therefore \frac{y}{x^2+xy} + \frac{x-y}{xy} = \frac{A}{xy+y^2}$, $\therefore \frac{y^2}{xy(x+y)} + \frac{(x-y)(x+y)}{xy(x+y)} = \frac{x^2}{xy(x+y)} = \frac{x}{xy+y^2} = \frac{A}{xy+y^2}$, $\therefore A = x$. 故选 A.

5. 1 【解析】 $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} = \frac{b^2+1+a^2+1}{(a^2+1)(b^2+1)} = \frac{a^2+b^2+2}{a^2b^2+a^2+b^2+1} = \frac{a^2+b^2+2}{(ab)^2+a^2+b^2+1}$. $\because ab = 1$, \therefore 原式 $= \frac{a^2+b^2+2}{1^2+a^2+b^2+1} = \frac{a^2+b^2+2}{a^2+b^2+2} = 1$. 故答案为 1.

6. 【解】原式 $= \frac{3a-6b+3b}{(a-b)^2} = \frac{3(a-b)}{(a-b)^2} = \frac{3}{a-b}$.

$\because a-b-1=0, \therefore a-b=1, \therefore$ 原式 $= \frac{3}{1} = 3$.

7. A 【解析】方程两边同时乘 $x(x+1)$, 得 $x+1-mx=0$, 解得 $x = \frac{1}{m-1}$. \because 分式方程的解是负数, $\therefore m-1 < 0, \therefore m < 1$. 又 $\because x(x+1) \neq 0, \therefore x \neq 0$ 且 $x \neq -1, \therefore \frac{1}{m-1} \neq 0$ 且 $\frac{1}{m-1} \neq -1, \therefore m \neq 0, \therefore m < 1$ 且 $m \neq 0$, 故选 A.

8. -1 或 2 【解析】 $\frac{3}{x-2} - \frac{kx-1}{x-2} = 1$, 去分母得 $3-kx+1 = x-2$, $\therefore (k+1)x = 6$. \because 关于 x 的方程 $\frac{3}{x-2} - \frac{kx-1}{x-2} = 1$ 无解, $\therefore k+1=0$ 或 $\frac{6}{k+1} = 2$, 解得 $k=-1$ 或 $k=2$. 故答案为 -1 或 2.

9. 【解】去分母得 $2+x(x+1) = x^2-1$, 去括号得 $2+x^2+x = x^2-1$, 移项、合并同类项得 $x = -3$. 检验: 把 $x = -3$ 代入 $(x+1)(x-1)$ 得, $(-3+1)(-3-1) = 8 \neq 0$, $\therefore x = -3$ 是原方程的解.

10. 【解】(1) 设 A 种外墙漆每千克的价格是 x 元, B 种外墙漆每千克的价格是 y 元.

根据题意得 $\begin{cases} 300x+300y = 15\ 000, \\ x-y = 2, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x = 26, \\ y = 24. \end{cases}$

答: A 种外墙漆每千克的价格是 26 元, B 种外墙漆每千克的价格是 24 元.

(2) 设甲每小时粉刷外墙的面积是 m 平方米, 则乙每小时粉刷外墙的面积是 $\frac{4}{5}m$ 平方米.

根据题意得 $\frac{500}{\frac{4}{5}m} - \frac{500}{m} = 5$,

解得 $m = 25$, 经检验, $m = 25$ 是所列方程的解, 且符合题意.

答: 甲每小时粉刷外墙的面积是 25 平方米.

第十三章 全等三角形

13.1 命题与证明

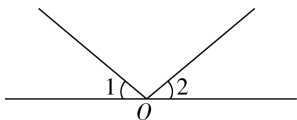


1. D 【解析】命题“锐角小于 90° ”的逆命题是小于 90° 的角是锐角, 故选 D.

2. 【解】(1) 逆命题: 如果一条线段是一个三角形

的中线, 那么这条线段把这个三角形分成两个面积相等的三角形. 是真命题.

(2) 逆命题: 如果两个角有公共顶点且相等, 那么这两个角是对顶角. 是假命题. 反例如下: 如图, $\angle 1 = \angle 2$, 且共顶点 O , 但这两个角不是对顶角.



方法总结 每个命题都有逆命题,但原命题的真假和其逆命题的真假没有任何关系.原命题是真命题,它的逆命题不一定是真命题;原命题是假命题,它的逆命题可能是真命题.

3. ①② 【解析】①由 $EF \parallel AB$, 得 $\angle ECA = \angle A$, $\angle FCB = \angle B$. 由 $\angle ECA + \angle ACB + \angle FCB = 180^\circ$, 得 $\angle A + \angle ACB + \angle B = 180^\circ$, 故①符合题意. ②由 $DF \parallel AC$, 得 $\angle EDF = \angle AED$, $\angle A = \angle FDB$. 由 $ED \parallel CB$, 得 $\angle EDA = \angle B$, $\angle C = \angle AED$, 则 $\angle C = \angle EDF$. 由 $\angle ADE + \angle EDF + \angle FDB = 180^\circ$, 得 $\angle B + \angle C + \angle A = 180^\circ$, 故②符合题意. ③由 $CD \perp AB$ 于 D , 得 $\angle ADC = \angle CDB = 90^\circ$, 无法证得三角形的内角和是 180° , 故③不符合题意. 故答案为①②.

4. 【解】(1) 证明: $\because GF \perp AB, CD \perp AB$ (已知),
 $\therefore \angle BFG = \angle BDC = 90^\circ$ (垂直的定义),
 $\therefore FG \parallel CD$ (同位角相等, 两直线平行),
 $\therefore \angle 2 = \angle 3$ (两直线平行, 同位角相等).
 $\because \angle 1 = \angle 2$ (已知),
 $\therefore \angle 1 = \angle 3$ (等量代换),
 $\therefore DE \parallel BC$ (内错角相等, 两直线平行).
 故答案为同位角相等, 两直线平行; $\angle 3$; 内错角相等, 两直线平行.

(2) 是真命题.

证明: $\because GF \perp AB, CD \perp AB$ (已知),
 $\therefore \angle BFG = \angle BDC = 90^\circ$ (垂直的定义),
 $\therefore FG \parallel CD$ (同位角相等, 两直线平行),
 $\therefore \angle 2 = \angle 3$ (两直线平行, 同位角相等).
 $\because DE \parallel BC$ (已知),
 $\therefore \angle 1 = \angle 3$ (两直线平行, 内错角相等),
 $\therefore \angle 1 = \angle 2$ (等量代换).

(3) 从① $GF \perp AB$, ② $CD \perp AB$, ③ $\angle 1 = \angle 2$, ④ $DE \parallel BC$ 中, 选出三个作为条件, 另一个作为结论, 可以组成 4 个真命题. 故答案为 4.

5. D 【解析】如果一个定理的逆命题是真命题, 那么这个逆命题也可以称为原定理的逆定理. A 选项, 逆命题是同旁内角互补, 两直线平行, 是真命题, 故本选项不符合题意; B 选项, 逆命题是和为 0 的两数互为相反数, 是真命题, 故本选项不符合题意; C 选项, 逆命题是两个锐角互余的三角形为直角三角形, 是真命题, 故本选项不符合题意; D 选项, 逆命题是如果两个角相等, 那么这两个角是同一个角的余角, 是假命题, 故本选项符合题意. 故选 D.

刷有所得

在几何问题中, 常通过作平行线来实现角的转换, 从而解决一些与角度有关的证明和计算.

注意

对应边 (对应角) 与对边 (对角) 的区别: 对应边、对应角是两个全等三角形中对应的两条边之间或对应的两个角之间的关系; 对边、对角是一个三角形中边和角之间的关系, “对边”是指三角形中某个角所对的边, “对角”是指三角形中某条边所对的角.

注意

全等三角形的周长、面积、对应高、中线、角平分线均相等.

13.2 全等图形



刷基础

1. C 【解析】形状相同、大小相等的两个图形是全等图形, 故嘉嘉的说法正确; 能够完全重合的两个图形是全等图形, 故淇淇的说法正确; 各边都相等的两个图形不一定是全等图形, 故笑笑的说法错误. 故选 C.

2. C 【解析】选项 A、B、D 中的两个图形的形状不一样, 不是全等图形, 故不符合题意; 选项 C 中的两个图形能够完全重合, 是全等图形, 故符合题意, 故选 C.

3. ②④ 【解析】① AB 与 CD 是对应边, 故①不符合题意; ② AC 与 CA 是对应边, 故②符合题意; ③ $\angle BAC$ 与 $\angle ACD$ 是对应角, 故③不符合题意; ④ $\angle CAB$ 与 $\angle ACD$ 是对应角, 故④符合题意. 综上所述, 正确的结论是②④.

4. 【解】点 A 与点 A , 点 B 与点 C , 点 D 与点 E 分别是对应顶点; $\angle A$ 与 $\angle A$, $\angle B$ 与 $\angle C$, $\angle ADB$ 与 $\angle AEC$ 分别是对应角; AB 与 AC , AD 与 AE , BD 与 CE 分别是对应边.

5. A 【解析】 \because 两个三角形全等, $\angle 1$ 是 a, c 边的夹角, $\therefore \angle 1 = 180^\circ - 60^\circ - 72^\circ = 48^\circ$. 故选 A.

6. D 【解析】 $\because \triangle ABC \cong \triangle ADE$, $\therefore BC = DE, AB = AD, \angle BAC = \angle DAE, \angle C = \angle E$, $\therefore \angle BAC - \angle DAC = \angle DAE - \angle DAC$, 即 $\angle BAD = \angle CAE$. 故选项 A、B、C 正确, 选项 D 不一定正确, 故选 D.

7. 11 【解析】 $\because \triangle ABD \cong \triangle ECB$, $\therefore BE = AD = 5, BD = CB$, $\therefore BD = BE + DE = 5 + 6 = 11$, $\therefore BC = 11$. 故答案为 11.

8. 12 【解析】由折叠的性质可知, $\triangle AMN \cong \triangle DMN$, $\therefore AN = DN$. $\because D$ 为 BC 的中点, 且 $BC = 6$, $\therefore BD = \frac{1}{2}BC = 3$, $\therefore \triangle DNB$ 的周长为 $ND + NB + BD = NA + NB + BD = AB + BD = 9 + 3 = 12$. 故答案为 12.

9. (1) 【证明】 $\because \triangle ACD \cong \triangle BED$,
 $\therefore \angle ADC = \angle BDE, \angle CAD = \angle DBE$.
 $\therefore \angle ADC + \angle BDE = 180^\circ$,
 $\therefore \angle ADC = \angle BDE = 90^\circ$.
 $\therefore \angle AEF + \angle AFE + \angle EAF = \angle BED + \angle BDE + \angle DBE$, 且 $\angle AEF = \angle BED$,
 $\therefore \angle AFE = \angle BDE = 90^\circ$.

- (2) 【解】 $\because S_{\triangle BCF} = 20, S_{\text{四边形}CFED} = 8$,
 $\therefore S_{\triangle BDE} = S_{\triangle BCF} - S_{\text{四边形}CFED} = 12$.
 $\because \triangle ACD \cong \triangle BED$,
 $\therefore S_{\triangle ACD} = S_{\triangle BED} = 12$,
 $\therefore S_{\triangle AEF} = S_{\triangle ACD} - S_{\text{四边形}CFED} = 12 - 8 = 4$.

13.3 全等三角形的判定

课时1 全等三角形的判定定理1 “边边边(SSS)”

刷基础

1. A 【解析】 \because 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中, $\begin{cases} AB=AD, \\ BC=CD, \\ AC=AC, \end{cases}$
 $\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC$ (SSS), $\therefore \angle ABC = \angle ADC$,
 \therefore 判定两个三角形全等的依据是 SSS. 故选 A.

2. D 【解析】 $\because AC = BD, AB = CD, BC = BC$,
 $\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB$ (SSS). $\because BD = AC, AB = CD$,
 $AD = AD, \therefore \triangle ABD \cong \triangle DCA$ (SSS), \therefore 由“SSS”
 可以直接判定全等的三角形的对数是 2.

3. 3 【解析】如图, 连接 CD . 在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$ 中, $\begin{cases} CA=CB, \\ CD=CD, \\ AD=BD, \end{cases}$
 $\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCD$ (SSS), $\therefore S_{\triangle ACD} = S_{\triangle BCD}$.
 $\because M, N$ 分别是 CA, CB 的中点, $\therefore S_{\triangle ADM} = S_{\triangle CDM} = \frac{1}{2}S_{\triangle ACD}$, $S_{\triangle BDN} = S_{\triangle CDN} = \frac{1}{2}S_{\triangle BCD}$, \therefore 阴影部分的面积为 $2S_{\triangle ADM}$. $\because \triangle ADM$ 的面积为 $\frac{3}{2}$,
 \therefore 阴影部分的面积为 $2 \times \frac{3}{2} = 3$.

4. 【证明】(1) $\because CE = BD, \therefore BD + CD = CE + CD$, 即 $BC = DE$. 又 $\because DF = AC, EF = AB$,
 $\therefore \triangle ABC \cong \triangle FED$ (SSS).
 (2) 由(1)知 $\triangle ABC \cong \triangle FED$,
 $\therefore \angle ACB = \angle EDF, \therefore AC \parallel DF$.

5. 【解】他的这种做法合理. 理由: 由该工人师傅的三步操作可知, 若 $a = b$, 则可得 $\triangle BED \cong \triangle CGF$, 所以 $\angle B = \angle C$.

6. B 【解析】根据三角形具有稳定性可知, 只要将图形分割成了三角形, 就具有稳定性. B 选项中有四边形, 不具有稳定性. 故选 B.

7. C 【解析】A 选项, 钉在 E, F 两处, 则 E, F, D 可构成三角形, 稳固, 不符合题意; B 选项, 钉在 B, D 两处, 则 A, B, D 可构成三角形, 稳固, 不符合题意; C 选项, 钉在 H, F 两处, 与其他点不构成三角形, 不稳固, 符合题意; D 选项, 钉在 A, F 两处, 则 A, F, D 可构成三角形, 稳固, 不符合题意. 故选 C.

8. 3 【解析】利用了三角形的稳定性的有 ①③④, 共 3 个. 故答案为 3.

课时2 全等三角形的判定定理2 “边角边(SAS)”

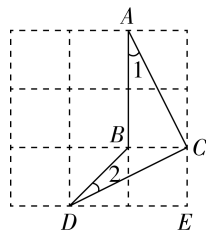
刷基础

1. A 【解析】A 选项, ①②符合证明三角形全等

的判定方法“SAS”. B、C、D 选项中相等的角所对的边不相等, 所以不可能全等.

2. B 【解析】如图.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 中, $\begin{cases} BC=EC, \\ \angle ABC = \angle DEC = 90^\circ, \\ AB=DE, \end{cases}$
 $\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEC$ (SAS),
 $\therefore \angle 1 = \angle CDE$, 则 $\angle 1 + \angle 2 = \angle CDE + \angle 2 = \angle BDE = 45^\circ$. 故选 B.



思路分析 **3. 边角边(SAS)** 【解析】 $\because AC = BD, AO = DO$,
 $\therefore AC - AO = BD - DO, \therefore CO = BO$. 在 $\triangle AOB$ 和

$\triangle DOC$ 中, $\begin{cases} AO=DO, \\ \angle AOB = \angle DOC, \\ BO=CO, \end{cases} \therefore \triangle AOB \cong \triangle DOC$ (SAS), $\therefore AB = CD$. \therefore 只要测得 C, D 之间的距离, 就可知道 A, B 间的距离. 故答案为边角边(SAS).

4. $AB = AC$ (答案不唯一) 【解析】添加的条件为 $AB = AC$ 或 $AE = AD$ (填写一个条件即可). 理由: 当添加的条件为 $AB = AC$ 时, $\because AB = AC, BE = CD, \therefore AE = AD$. 在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle ABD$ 中,

$\begin{cases} AC=AB, \\ \angle A = \angle A, \\ AE=AD, \end{cases} \therefore \triangle ACE \cong \triangle ABD$ (SAS). 当添加的条件为 $AE = AD$ 时, $\because AE = AD, BE = CD, \therefore AE - BE = AD - CD$, 即 $AB = AC$. 在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle ABD$ 中, $\begin{cases} AC=AB, \\ \angle A = \angle A, \\ AE=AD, \end{cases} \therefore \triangle ACE \cong \triangle ABD$ (SAS). 故答案为 $AB = AC$ (答案不唯一).

5. 55° 【解析】 $\because \angle BAC = \angle DAE$, 即 $\angle 1 + \angle DAC = \angle DAC + \angle CAE, \therefore \angle 1 = \angle CAE$. 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中, $\begin{cases} AB=AC, \\ \angle 1 = \angle CAE, \\ AD=AE, \end{cases} \therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS), $\therefore \angle ABD = \angle 2 = 30^\circ, \therefore \angle 3 = \angle 1 + \angle ABD = 25^\circ + 30^\circ = 55^\circ$. 故答案为 55° .

6. (1) 【证明】因为 $CE \parallel AB$, 所以 $\angle B = \angle ECD$.

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DCE$ 中, $\begin{cases} AB=CD, \\ \angle B = \angle ECD, \\ BC=CE, \end{cases}$
 所以 $\triangle ABC \cong \triangle DCE$ (SAS).

(2) 【解】因为 $AB = 2CE, CE = BC$, 所以 $AB = 2BC$. 因为 $AB = CD$, 所以 $CD = 2BC$. 又 $BC + CD = BD = 12$, 所以 $BC + 2BC = 12$, 所以 $BC = 4$.

7. 【解】 $\because BF = EC, BC = BF + FC, EF = EC + CF$,
 $\therefore BC = EF$. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中, $\begin{cases} AB=DE, \\ \angle B = \angle E, \\ BC=EF, \end{cases}$

刷有所得

寻找三角形全等的条件时, 要结合图形, 挖掘图形中的隐含条件: 如公共边、公共角、对顶角、中点、角平分线、高线等带来的相等关系, 以及等线段加(或减)同线段或等线段的和(或差)相等.

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$ (SAS), $\therefore C_{\triangle DEF} = C_{\triangle ABC} = 24$ cm. $\therefore CF = 3$ cm, \therefore 制作该风筝框架需用材料的总长度至少是 $24+24-3=45$ (cm).

易错错

8. $AC=BD$ 【解析】补充条件 $AC=BD$.

理由: 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BAD$ 中, $\begin{cases} AC=BD, \\ \angle CAB = \angle DBA, \\ AB=BA, \end{cases}$
 $\therefore \triangle ABC \cong \triangle BAD$ (SAS). 故答案为 $AC=BD$.

刷提升

1. **A** 【解析】 $\because AB \parallel CD, \therefore \angle A = \angle D. \because AB = CD, AE = FD, \therefore \triangle ABE \cong \triangle DCF$ (SAS), $\therefore BE = CF, \angle AEB = \angle DFC, \therefore \angle BEF = \angle CFE. \because EF = FE, \therefore \triangle BEF \cong \triangle CFE$ (SAS). $\therefore AE = DF, \therefore AF = DE. \because \angle A = \angle D, AB = CD, \therefore \triangle ABF \cong \triangle DCE$ (SAS).

2. **D** 【解析】① $\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ, \therefore \angle BAC + \angle CAD = \angle DAE + \angle CAD$, 即 $\angle BAD = \angle CAE. \therefore$ 在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAE$ 中, $\begin{cases} AB=AC, \\ \angle BAD = \angle CAE, \\ AD=AE, \end{cases} \therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE$ (SAS), $\therefore BD = CE$, 结论正确. ② $\because \angle BAC = 90^\circ, \angle ABC = \angle ACB, \therefore \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ, \therefore \angle ABD + \angle DBC = 45^\circ. \because \triangle BAD \cong \triangle CAE, \therefore \angle ABD = \angle ACE, \therefore \angle ACE + \angle DBC = 45^\circ$, 结论正确. ③ $\because \angle ACB = 45^\circ, \angle ACE + \angle DBC = 45^\circ, \therefore \angle DBC + \angle DCB = \angle DBC + \angle ACE + \angle ACB = 90^\circ, \therefore \angle BDC = 90^\circ$, 即 $BD \perp CE$, 结论正确. ④ $\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ, \therefore \angle BAE + \angle DAC = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ$, 结论正确. 故选 D.

3. **110°** 【解析】在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中, $\begin{cases} AB=AD, \\ \angle B = \angle D, \\ BC=DE, \end{cases} \therefore \triangle ABC \cong \triangle ADE$ (SAS), $\therefore \angle DAE = \angle CAB. \because \angle EAB = 120^\circ, \angle CAD = 20^\circ, \therefore \angle EAD = \angle CAB = 50^\circ, \therefore \angle DAB = 70^\circ$. 设 GB 与 AD 交于点 $F. \because \angle GFD = \angle AFB, \angle B = \angle D = 25^\circ, \therefore \angle DGB = \angle DAB = 70^\circ, \therefore \angle EGB = 110^\circ$. 故答案为 110° .

4. 【解】(1) $\triangle ACP$ 与 $\triangle BPQ$ 全等. 线段 PC 与线段 PQ 垂直. 理由如下: 当 $t=1$ 时, $AP=BQ=1, BP=AC=3. \because \angle A = \angle B = 90^\circ, \therefore$ 在 $\triangle ACP$ 和 $\triangle BPQ$ 中, $\begin{cases} AP=BQ, \\ \angle A = \angle B, \\ AC=BP, \end{cases}$
 $\therefore \triangle ACP \cong \triangle BPQ$ (SAS), $\therefore \angle ACP = \angle BPQ, \therefore \angle APC + \angle BPQ = \angle APC + \angle ACP = 90^\circ, \therefore \angle CPQ = 90^\circ$, 即线段 PC 与线段 PQ 垂直.
 (2) 存在. ①若 $\triangle ACP \cong \triangle BPQ$, 则 $AC=BP$,

易错警示

利用两边与一角分别对应相等证明两个三角形全等时, 只能选用“两边及其夹角”, 即用“SAS”证明, 切勿用“SSA”, 它不能用来证明三角形全等.

思路分析

由 SAS 可证 $\triangle ABC \cong \triangle ADE$, 可得 $\angle DAE = \angle CAB$, 即可求得 $\angle CAB$ 的度数, 由三角形内角和定理和对顶角的性质可得 $\angle DGB = \angle DAB$, 进而可求得 $\angle EGB$ 的度数.

易错警示

(2) 理解题意, 注意分 $\triangle ACP \cong \triangle BPQ$ 和 $\triangle ACP \cong \triangle BQP$ 两种情况进行讨论, 不要漏解.

$AP=BQ$, 即 $\begin{cases} 3=4-t, \\ t=xt, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} t=1, \\ x=1. \end{cases}$

②若 $\triangle ACP \cong \triangle BQP$, 则 $AC=BQ, AP=BP$,

即 $\begin{cases} 3=xt, \\ t=4-t, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} t=2, \\ x=\frac{3}{2}. \end{cases}$

综上所述, 存在 $\begin{cases} t=1, \\ x=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} t=2, \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$ 使得 $\triangle ACP$ 与 $\triangle BPQ$ 全等.

刷素养

5. (1) 【解】因为 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, 所以 $BD=$

CD . 在 $\triangle ADC$ 与 $\triangle EDB$ 中, $\begin{cases} AD=DE, \\ \angle ADC = \angle BDE, \\ CD=BD, \end{cases}$

所以 $\triangle ADC \cong \triangle EDB$ (SAS).

故答案为 $\triangle ADC \cong \triangle EDB$.

(2) 【解】如图(1), 延长 EP 至点 Q , 使 $PQ=PE$, 连接 FQ . 因为 EP 是 $\triangle DEF$ 的中线, 所以 $PD=PF$.

在 $\triangle PDE$ 与 $\triangle PFQ$ 中, $\begin{cases} PE=PQ, \\ \angle EPD = \angle QPF, \\ PD=PF, \end{cases}$

所以 $\triangle PDE \cong \triangle PFQ$ (SAS),

所以 $FQ = DE = 3$. 在

$\triangle EFQ$ 中, $EF - FQ < QE <$

$EF + FQ$, 即 $5 - 3 < 2EP < 5 +$

3, 所以 EP 的取值范围是 $1 < EP < 4$, 所以 EP 的最大整数值为 3.

(3) 【证明】如图(2), 延长

AD 到 M , 使 $MD=AD$, 连接

BM , 所以 $AM=2AD$.

因为 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线,

所以 $BD=CD$.

在 $\triangle BMD$ 与 $\triangle CAD$ 中, $\begin{cases} MD=AD, \\ \angle BDM = \angle CDA, \\ BD=CD, \end{cases}$

所以 $\triangle BMD \cong \triangle CAD$ (SAS), 所以 $BM=CA$,

$\angle M = \angle CAD$, 所以 $\angle BAC = \angle BAM + \angle CAD =$

$\angle BAM + \angle M$. 因为 $\angle ACB = \angle BAC$, 所以

$\angle ACB = \angle BAM + \angle M$, 所以 $\angle ACQ = 180^\circ -$

$\angle ACB = 180^\circ - (\angle BAM + \angle M)$. 又因为 $\angle MBA =$

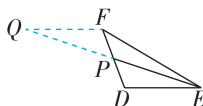
$180^\circ - (\angle BAM + \angle M)$, 所以 $\angle ACQ = \angle MBA$.

因为 AC 是 $\triangle ABQ$ 的中线, 所以 $QC=BC$.

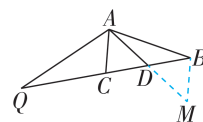
因为 $AB=BC$, 所以 $QC=AB$. 在 $\triangle ACQ$ 与

$\triangle MBA$ 中, $\begin{cases} CA=BM, \\ \angle ACQ = \angle MBA, \\ QC=AB, \end{cases}$ 所以 $\triangle ACQ \cong$

$\triangle MBA$ (SAS), 所以 $AQ=AM=2AD$.



图(1)



图(2)

课时3 全等三角形的判定定理3 “两角及一边(ASA,AAS)”

刷基础

1. C 【解析】③保留了原来三角形的两个角和一条边,则可以根据“ASA”来配一块一样的三角形玻璃,故应带③去. 故选 C.

2. 4 m 【解析】 $\because AB \parallel DE, \therefore \angle ABC = \angle DEF$.

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中,
$$\begin{cases} \angle ABC = \angle DEF, \\ AB = DE, \\ \angle A = \angle D, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$ (ASA), $\therefore BC = EF, \therefore BF + FC = EC + FC, \therefore BF = EC = 3$ m. $\because BE = 10$ m, $\therefore FC = BE - BF - EC = 10 - 3 - 3 = 4$ (m).

3. 【证明】(1) 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中,
$$\begin{cases} AB = AC, \\ \angle 1 = \angle 2, \\ AD = AE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS), $\therefore BD = CE$.

(2) $\because \angle 1 = \angle 2, \therefore \angle 1 + \angle DAE = \angle 2 + \angle DAE$, 即 $\angle BAN = \angle CAM$. 由(1)得 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$, $\therefore \angle B = \angle C$.

在 $\triangle ACM$ 和 $\triangle ABN$ 中,
$$\begin{cases} \angle C = \angle B, \\ AC = AB, \\ \angle CAM = \angle BAN, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACM \cong \triangle ABN$ (ASA), $\therefore \angle M = \angle N$.

4. B 【解析】 $\because AE = BD, \therefore AE + BE = BD + BE$, 即

$AB = DE$. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,
$$\begin{cases} \angle C = \angle F, \\ \angle A = \angle D, \\ AB = DE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$ (AAS), $\therefore EF = BC. \because \angle AEM = \angle D + \angle F, \angle DBN = \angle A + \angle C, \therefore \angle AEM = \angle DBN$.

在 $\triangle AEM$ 和 $\triangle DBN$ 中,
$$\begin{cases} \angle A = \angle D, \\ AE = DB, \\ \angle AEM = \angle DBN, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEM \cong \triangle DBN$ (ASA), $\therefore \angle AME = \angle DNB, ME = BN. \because EF = BC, \therefore EF - EM = BC - BN$, 即 $FM = CN. \because \angle AME = \angle BND, \angle FMG = \angle AME, \angle CNG = \angle DNB, \therefore \angle FMG = \angle CNG$.

在 $\triangle FMG$ 和 $\triangle CNG$ 中,
$$\begin{cases} \angle F = \angle C, \\ FM = CN, \\ \angle FMG = \angle CNG, \end{cases}$$

$\therefore \triangle FMG \cong \triangle CNG$ (ASA). 故全等三角形共 3 对, 故选 B.

5. C 【解析】 $\because \angle B + \angle BAC + \angle BCA = 180^\circ, \angle BCA + \angle ACD + \angle DCE = 180^\circ, \angle B = \angle ACD, \therefore \angle BAC = \angle DCE$. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CED$ 中,

$$\begin{cases} \angle B = \angle E, \\ \angle BAC = \angle DCE, \\ AC = CD, \end{cases}$$

思路分析

(1) 由 SAS 证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$, 得出对应边相等即可; (2) 先证出 $\angle BAN = \angle CAM$, 由全等三角形的性质得出 $\angle B = \angle C$, 再由 ASA 证明 $\triangle ACM \cong \triangle ABN$, 得出对应角相等即可.

思路分析

先证明 $\triangle ADC \cong \triangle AEB$, 可得 $\angle C = \angle B$, 再证明 $\triangle EPC \cong \triangle DPB$, 可得 $PC = PB$, 然后证明 $\triangle ACP \cong \triangle ABP$, 可得 $\angle CAP = \angle BAP$, 利用全等三角形的判定和性质判断即可.

$\therefore BC = DE, AB = CE = 2. \because BE = 6, \therefore BC = BE - CE = 4, \therefore DE = 4$. 故选 C.

6. 14 【解析】 $\because EF$ 为 $\triangle AED$ 的高, $\therefore EF \perp AC, \therefore \angle EFD = 90^\circ, \therefore \angle EFD = \angle C. \because \angle EDF = \angle CDB, DE = BD, \therefore \triangle EFD \cong \triangle BCD$ (AAS), $\therefore S_{\triangle EFD} = S_{\triangle BCD} = 4. \because ED = BD, \therefore S_{\triangle AED} = S_{\triangle ABD} = S_{\triangle AEF} + S_{\triangle EFD} = 10, \therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = 14$. 故答案为 14.

7. 【解】(1) $\triangle COG$ 与 $\triangle OBF$ 全等.

理由: 由题意得 $OC = OB, \angle OGC = \angle BFO = 90^\circ. \therefore \angle BOC = 90^\circ, \angle OGC = 90^\circ, \therefore \angle COG + \angle BOF = 90^\circ, \angle COG + \angle OCG = 90^\circ, \therefore \angle BOF = \angle OCG$.

在 $\triangle COG$ 与 $\triangle OBF$ 中,
$$\begin{cases} \angle OCG = \angle BOF, \\ \angle OGC = \angle BFO, \\ OC = OB, \end{cases}$$

$\therefore \triangle COG \cong \triangle OBF$ (AAS).

(2) $\because \triangle COG \cong \triangle OBF$,

$\therefore CG = OF = 2.2$ m, $OG = BF = 1.8$ m,

$\therefore GF = OF - OG = 0.4$ m, 即 GF 的长为 0.4 m.

8. (1) 【证明】 $\because AE \perp BF, \therefore \angle BEA = \angle AEF = 90^\circ. \because BE$ 平分 $\angle ABC, \therefore \angle ABE = \angle CBE$.

$\because AD \parallel BC, \therefore \angle CBF = \angle F, \therefore \angle ABF = \angle F$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle AFE$ 中,
$$\begin{cases} \angle ABE = \angle F, \\ \angle BEA = \angle AEF, \\ AE = AE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle AFE$ (AAS).

(2) 【解】 $\because \triangle ABE \cong \triangle AFE$,

$\therefore BE = EF, AB = AF$.

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle FDE$ 中,
$$\begin{cases} \angle EBC = \angle F, \\ BE = FE, \\ \angle BEC = \angle FED, \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle FDE$ (ASA), $\therefore BC = DF, \therefore AF = AD + DF = AD + BC. \because AD = 3, BC = 8, \therefore AB = AF = 3 + 8 = 11$.

刷提升

1. B 【解析】在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle AEB$ 中,

$$\begin{cases} AD = AE, \\ \angle DAC = \angle EAB, \\ AC = AB, \end{cases}$$

$\therefore \angle C = \angle B. \because AB = AC, AD = AE, \therefore AC - AE = AB - AD, \therefore EC = DB$. 在 $\triangle EPC$ 和 $\triangle DPB$ 中,

$$\begin{cases} \angle C = \angle B, \\ \angle EPC = \angle DPB, \\ EC = DB, \end{cases}$$

$\therefore PC = PB$, 故①正确. 在 $\triangle ACP$ 和 $\triangle ABP$

中,
$$\begin{cases} AC = AB, \\ \angle C = \angle B, \\ CP = BP, \end{cases}$$

$\therefore \angle CAP = \angle BAP$, 故②正确. 无法得出 $\angle PAB =$

$\angle B$, 故③错误. 易通过 SAS 证明 $\triangle PEA \cong \triangle PDA$, $\therefore \triangle PCE \cong \triangle PBD$, $\triangle PEA \cong \triangle PDA$, $\triangle PCA \cong \triangle PBA$, $\triangle ACD \cong \triangle ABE$, 共有 4 对全等三角形, 故④正确. 故选 B.

2. C

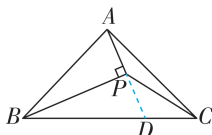
思路分析

延长 AP 交 BC 于点 D , 根据角平分线和垂线构造全等三角形

由全等三角形的性质得 $AP=PD$

再根据等底同高的三角形面积相等, 即可得解

【解析】 延长 AP 交 BC 于点 D , 如图. $\because BP$ 平分 $\angle ABD$, $\therefore \angle ABP = \angle DBP$. $\because BP \perp AP$, $\therefore \angle BPA = \angle BPD = 90^\circ$. 又 $\because BP = BP$, $\therefore \triangle BAP \cong \triangle BDP$ (ASA), $\therefore AP = PD$, $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle BDP}$, $\therefore S_{\triangle APC} = S_{\triangle DPC}$. $\because S_{\triangle ABC} = 12 \text{ cm}^2$, $\therefore S_{\triangle PBC} = S_{\triangle BPD} + S_{\triangle DCP} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 12 = 6 (\text{cm}^2)$. 故选 C.



3. A **【解析】** $\because \angle 1 = \angle 2 = \angle BAC$, $\angle 1 =$ **关键点拨**

$\angle BAE + \angle ABE$, $\angle BAC = \angle BAE + \angle CAF$, $\angle 2 = \angle FCA + \angle CAF$, $\therefore \angle ABE = \angle CAF$, $\angle BAE = \angle FCA$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CAF$ 中, $\begin{cases} \angle ABE = \angle CAF, \\ AB = CA, \\ \angle BAE = \angle ACF, \end{cases}$ $\therefore \triangle ABE \cong \triangle CAF$ (ASA), $\therefore S_{\triangle ACF} = S_{\triangle ABE}$, $\therefore S_{\triangle ACF} + S_{\triangle BDE} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle BDE} = S_{\triangle ABD}$. $\because \triangle ABC$ 的面积为 18, $CD = 2BD$, $\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{3} \times 18 = 6$, $\therefore S_{\triangle ACF} + S_{\triangle BDE} = S_{\triangle ABD} = 6$. 故选 A.

4. 3 **【解析】** $\because AB \perp CD$, $CE \perp AD$, $\therefore \angle C + \angle D = 90^\circ$, $\angle A + \angle D = 90^\circ$, $\therefore \angle A = \angle C$. $\because CE \perp AD$, $BF \perp AD$, $\therefore \angle AFB = \angle CED = 90^\circ$. 在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle CDE$ 中, $\begin{cases} \angle AFB = \angle CED, \\ \angle A = \angle C, \\ AB = CD, \end{cases} \therefore \triangle ABF \cong \triangle CDE$ (AAS), $\therefore BF = DE = 8$, $CE = AF = 10$, $\therefore AE = AD - DE = 15 - 8 = 7$, $\therefore EF = AF - AE = 10 - 7 = 3$. 故答案为 3.

5. (1) 【解】 当 $t = 1$ 时, $AP = 3 \text{ cm}$, 当 $t = 2$ 时, $AP = 4 - (2 \times 3 - 4) = 2 (\text{cm})$. 故答案为 3, 2.

(2) **【证明】** 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EDC$ 中,

$$\begin{cases} AC = EC, \\ \angle ACB = \angle ECD, \\ BC = CD, \end{cases} \therefore \triangle ABC \cong \triangle EDC (\text{SAS}),$$

$\therefore \angle A = \angle E$, $\therefore AB \parallel DE$.

(3) **【解】** $\because \triangle ABC \cong \triangle EDC$, $\therefore AB = DE = 4 \text{ cm}$. 根据题意, 得 $DQ = t \text{ cm}$, 则 $EQ = (4 - t) \text{ cm}$. 当 PQ 经过点 C 时, 如图, $\angle ACP = \angle ECQ$.

在 $\triangle ACP$ 和 $\triangle ECQ$ 中, $\begin{cases} \angle A = \angle E, \\ AC = EC, \\ \angle ACP = \angle ECQ, \end{cases}$

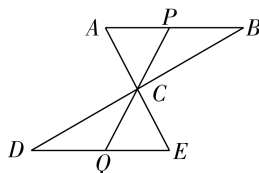
$\therefore \triangle ACP \cong \triangle ECQ$ (ASA), $\therefore AP = EQ$. 当

$0 \leq t \leq \frac{4}{3}$ 时, $3t = 4 - t$,

解得 $t = 1$; 当 $\frac{4}{3} < t \leq \frac{8}{3}$

时, $8 - 3t = 4 - t$, 解得 $t = 2$.

综上所述, 当线段 PQ 经过点 C 时, DQ 的长为 1 cm 或 2 cm.



刷素养

6. (1) 【解】 如图 (1), 作 $QD \perp AC$ 于 D , 则 $\angle ADQ = 90^\circ$.

$\because \angle PAQ = 90^\circ$, $\therefore \angle PAC + \angle DAQ = 90^\circ$.

$\because \angle ACB = 90^\circ$, $\therefore \angle PAC + \angle CPA = 90^\circ$,

$\therefore \angle DAQ = \angle CPA$.

又 $\because \angle ADQ = \angle C = 90^\circ$, $AQ = AP$,

$\therefore \triangle ADQ \cong \triangle PCA$ (AAS), $\therefore QD = AC = 1$,

\therefore 点 Q 到直线 AC 的距离为 1.

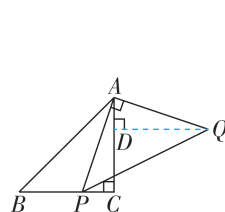


图 (1)

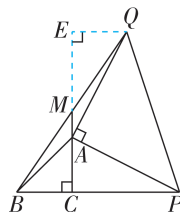


图 (2)

思路分析

(2) 过 Q 作 $QE \perp CM$, 交 CM 的延长线于 E . 先证 $\triangle AQE \cong \triangle PAC$ (AAS), 得 $QE = AC$, 则 $QE = BC$, 再证 $\triangle BCM \cong \triangle QEM$ (AAS), 即可得出结论;

(3) 分两种情况讨论: ①点 M 在线段 AC 上, ②点 M 在 CA 的延长线上, 由三角形面积关系得 $BP = 3AM$, 列式求解即可.

(2) **【证明】** 如图 (2), 作 $QE \perp MC$, 交 CM 的延长线于 E , 则 $\angle E = 90^\circ$. $\because \angle PAQ = 90^\circ$, $\therefore \angle EAQ + \angle PAC = 180^\circ - \angle PAQ = 90^\circ$.

$\because \angle ACP = 90^\circ$, $\therefore \angle CPA + \angle PAC = 90^\circ$,

$\therefore \angle EAQ = \angle CPA$. 又 $\because \angle E = \angle ACP = 90^\circ$, $AQ = AP$, $\therefore \triangle EAQ \cong \triangle CPA$ (AAS), $\therefore EQ = CA$.

$\because AC = CB$, $\therefore EQ = CB$.

又 $\because \angle EMQ = \angle CMB$, $\angle E = \angle MCB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle EMQ \cong \triangle CMB$ (AAS),

$\therefore BM = QM$.

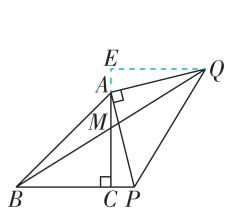
(3) **【解】** 由题图可知, P 在射线 BC 上运动的过程中, M 在射线 CA 上运动, 分两种情况讨论: ①如图 (3), 若 M 在线段 CA 上, 同 (2) 作辅助线, 同 (2) 得, $\triangle EAQ \cong \triangle CPA$, $\therefore EA = CP$, $QE = AC = 1$. 同 (2) 得, $\triangle EMQ \cong \triangle CMB$, $\therefore EM = CM$.

$$\therefore S_{\triangle ABP} = 3S_{\triangle AMQ}, \therefore \frac{1}{2} \cdot BP \cdot AC = 3 \times \frac{1}{2} \cdot$$

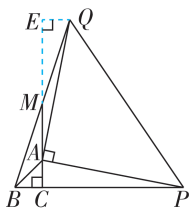
$AM \cdot QE$, $\therefore BP = 3AM$.

设 $AM = x$, 则 $BP = 3x$, $\therefore CP = BP - BC = 3x - 1$, $AE = EM - AM = CM - AM = (1 - x) - x = 1 - 2x$,

$$\therefore 3x-1=1-2x, \text{解得 } x=\frac{2}{5}, \therefore BP=3x=\frac{6}{5}.$$



图(3)



图(4)

②如图(4),若 M 在 CA 的延长线上,同(2)作辅助线,同①可得 $EA=CP, BP=3AM$. 设 $AM=x$, 则 $BP=3x, \therefore CP=BP-BC=3x-1, AE=EM+AM=CM+AM=(1+x)+x=1+2x, \therefore 3x-1=1+2x$, 解得 $x=2, \therefore BP=3x=6$.

综上所述, BP 的长为 $\frac{6}{5}$ 或 6 . 故答案为 $\frac{6}{5}$ 或 6 .

课时4 通过图形的特殊位置关系 寻找证明的途径



1. 【证明】(1) 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中, $\begin{cases} BC=EF, \\ AB=DE, \\ AC=DF, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$ (SSS),

$\therefore \angle BCA = \angle EFD, \therefore BC \parallel EF$.

(2) $\because \triangle ABC \cong \triangle DEF, \therefore \angle A = \angle D. \therefore AC = DF, \therefore AC - CF = DF - CF, \therefore AF = DC$. 又 $\because AB = DE, \therefore \triangle ABF \cong \triangle DEC$ (SAS), $\therefore BF = CE$.

2. (1) 【证明】 $\because \angle ACB = 90^\circ, DE \perp AB,$
 $\therefore \angle DEB + \angle ABC = 90^\circ, \angle A + \angle ABC = 90^\circ,$
 $\therefore \angle DEB = \angle A$.

在 $\triangle ACB$ 和 $\triangle EBD$ 中, $\begin{cases} \angle ACB = \angle EBD = 90^\circ, \\ \angle A = \angle DEB, \\ AB = DE, \end{cases}$

$\therefore \triangle ACB \cong \triangle EBD$ (AAS).

(2) 【解】由(1)得 $\triangle ACB \cong \triangle EBD, \therefore BC = DB, AC = EB. \therefore E$ 是 BC 的中点, $\therefore EB = \frac{1}{2}BC$.

$\because DB = 12, BC = DB, \therefore BC = 12, \therefore AC = EB = \frac{1}{2}BC = 6$.

3. 【解】(1) $BD \perp AC, BD = AC$. 理由: 如图(1), 延

长 BD 交 AC 于 $F. \because AE \perp BC, \therefore \angle AEB = \angle AEC = 90^\circ$. 在 $\triangle BED$ 和 $\triangle AEC$ 中,

$\begin{cases} BE = AE, \\ \angle BED = \angle AEC, \\ ED = CE, \end{cases} \therefore \triangle BED \cong \triangle AEC$ (SAS),

$\therefore BD = AC, \angle DBE = \angle CAE. \therefore \angle BED = 90^\circ,$
 $\therefore \angle EBD + \angle BDE = 90^\circ. \therefore \angle BDE = \angle ADF,$

思路分析

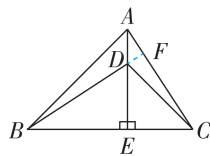
(1)(2) 延长 CB 到 E , 使 $BE = AM$, 连接 DE , 先证明 $\triangle DAM \cong \triangle DBE$, 推出 $\angle BDE = \angle MDA, DM = DE$, 再证明 $\triangle MDN \cong \triangle EDN$, 推出 $MN = NE$, 即可求解;

(3) 在 CB 上截取 $BE = AM$, 连接 DE , 先证明 $\triangle DAM \cong \triangle DBE$, 推出 $\angle BDE = \angle MDA, DM = DE$, 再证明 $\triangle MDN \cong \triangle EDN$, 推出 $MN = NE$, 即可求解.

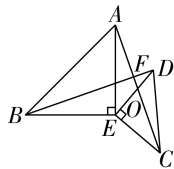
注意

$\triangle DEC$ 绕点 E 旋转过程中, 始终有 $\triangle BED \cong \triangle AEC$.

$\therefore \angle ADF + \angle CAE = 90^\circ, \therefore \angle AFD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ, \therefore BD \perp AC$.



图(1)



图(2)

(2) BD 与 AC 的位置关系和数量关系不发生变化. 理由: 设 AC 与 DE 相交于点 O , 如图(2).

$\because \angle BEA = \angle DEC = 90^\circ, \therefore \angle BEA + \angle AED = \angle DEC + \angle AED, \therefore \angle BED = \angle AEC$. 在 $\triangle BED$ 和

$\triangle AEC$ 中, $\begin{cases} BE = AE, \\ \angle BED = \angle AEC, \\ ED = CE, \end{cases} \therefore \triangle BED \cong$

$\triangle AEC$ (SAS), $\therefore BD = AC, \angle BDE = \angle ACE$.

$\because \angle DEC = 90^\circ, \therefore \angle ACE + \angle EOC = 90^\circ$.

$\because \angle EOC = \angle DOF, \therefore \angle BDE + \angle DOF = 90^\circ,$

$\therefore \angle DFO = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ, \therefore BD \perp AC$.

4. 【解】(1) $AM + BN = MN$. 证明: 延长 CB 到 E , 使

$BE = AM$, 连接 DE , 如图(1). 由题意得 $AD = BD, \angle A = \angle CBD = 90^\circ. \therefore \angle ACD = 30^\circ, \therefore \angle ADC = \angle BDC = 60^\circ. \therefore \angle A = \angle CBD = 90^\circ, \therefore \angle A = \angle EBD = 90^\circ$. 在 $\triangle DAM$ 和 $\triangle DBE$ 中,

$\begin{cases} AM = BE, \\ \angle A = \angle DBE, \\ AD = BD, \end{cases} \therefore \triangle DAM \cong \triangle DBE, \therefore \angle BDE = \angle MDA, DM = DE$.

$\because \angle MDN = \angle ADC = 60^\circ, \therefore \angle ADM = \angle NDC, \therefore \angle BDE = \angle NDC, \therefore \angle MDN = \angle NDE = \angle BDC$. 在 $\triangle MDN$ 和

$\triangle EDN$ 中, $\begin{cases} DM = DE, \\ \angle MDN = \angle NDE, \\ DN = DN, \end{cases} \therefore \triangle MDN \cong$

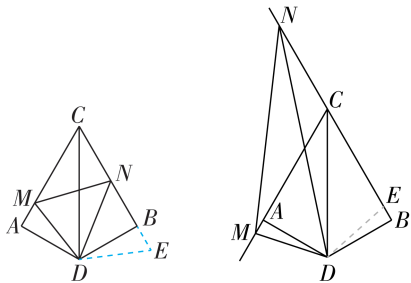
$\triangle EDN, \therefore MN = NE. \therefore NE = BE + BN = AM + BN, \therefore AM + BN = MN$.

(2) $AM + BN = MN$. 证明: 延长 CB 到 E , 使 $BE = AM$, 连接 DE , 如图(1). $\because \angle ACD + \angle MDN = 90^\circ, \angle ACD + \angle ADC = 90^\circ, \therefore \angle MDN = \angle ADC = \angle BDC, \therefore \angle ADM = \angle CDN$. 由(1)知, $\triangle DAM \cong \triangle DBE, \therefore \angle BDE = \angle MDA = \angle CDN, DM = DE. \therefore \angle MDN = \angle CDB, \therefore \angle CDM = \angle NDB, \therefore \angle MDN = \angle NDE$. 在 $\triangle MDN$ 和 $\triangle EDN$ 中,

$\begin{cases} DM = DE, \\ \angle MDN = \angle NDE, \\ DN = DN, \end{cases} \therefore \triangle MDN \cong \triangle EDN, \therefore MN = NE. \therefore NE = BE + BN = AM + BN, \therefore AM + BN = MN$.

(3) $BN - AM = MN$, 补全图形, 如图(2). 在 CB 上截取 $BE = AM$, 连接 $DE. \therefore \angle CDA + \angle ACD = 90^\circ, \angle MDN + \angle ACD = 90^\circ, \therefore \angle MDN = \angle CDA =$

$\angle CDB, \therefore \angle MDA = \angle CDN. \because \angle B = \angle CAD = 90^\circ, \therefore \angle B = \angle DAM = 90^\circ$. 在 $\triangle DAM$ 和 $\triangle DBE$ 中, $\begin{cases} AM=BE, \\ \angle DAM=\angle DBE, \therefore \triangle DAM \cong \triangle DBE, \\ AD=BD, \end{cases}$
 $\therefore \angle BDE = \angle ADM = \angle CDN, DM=DE, \therefore \angle BDC = \angle MDN = \angle EDN$. 在 $\triangle MDN$ 和 $\triangle EDN$ 中, $\begin{cases} DM=DE, \\ \angle MDN=\angle EDN, \therefore \triangle MDN \cong \triangle EDN, \therefore MN=DN=DN, \end{cases}$
 $NE. \therefore NE = BN - BE = BN - AM, \therefore BN - AM = MN$.



图(1) 图(2)

大招专题 1 全等三角形常考模型

刷难关

大招解读 | 平移模型

把 $\triangle ABC$ 沿着某一条直线 l 平移, 所得到的 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 全等.

基本模型	常见模型

1. 【证明】因为 $AC \parallel DF, BC \parallel EF$, 所以 $\angle A = \angle EDF, \angle ABC = \angle E$. 又因为 $AC = DF$, 所以 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (AAS), 所以 $AB = DE$, 所以 $AB - BD = DE - BD$, 所以 $AD = BE$.

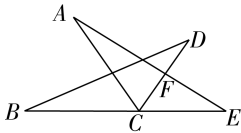
大招解读 | 对称模型

将两个三角形沿着某一条直线折叠后, 直线两边的三角形能够完全重合, 这两个三角形称为对称型全等三角形, 此类图形中要注意隐含条件, 即公共边或公共角相等.

基本模型	常见模型

刷有所得 2. 【解】因为 $\angle BAD = \angle EAC$, 所以 $\angle BAD + \angle CAD = \angle EAC + \angle CAD$, 即 $\angle BAC = \angle EAD$.
在 $\triangle BAC$ 与 $\triangle EAD$ 中, $\begin{cases} AB=AE, \\ \angle BAC=\angle EAD, \\ AC=AD, \end{cases}$
所以 $\triangle BAC \cong \triangle EAD$ (SAS),
所以 $\angle D = \angle C = 50^\circ$.

大招解读 | “手拉手”模型
条件: ①共顶点, ②等角, ③两长两短等线段;
结论: $\triangle BCD \cong \triangle ACE$ (SAS).



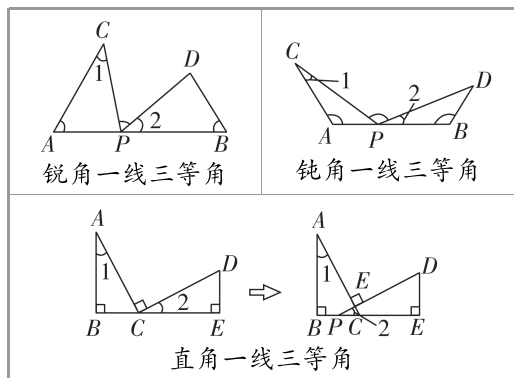
3. (1) 【证明】因为 $\angle DAB = \angle CAE$, 所以 $\angle DAB + \angle BAC = \angle CAE + \angle BAC$, 所以 $\angle DAC = \angle BAE$. 又因为 $AD = AB, AC = AE$, 所以 $\triangle BAE \cong \triangle DAC$ (SAS).
(2) 【解】因为 $\triangle BAE \cong \triangle DAC$, 所以 $\angle E = \angle C$. 因为 $\angle CAD = 125^\circ, \angle D = 20^\circ$, 所以 $\angle C = 180^\circ - (\angle CAD + \angle D) = 180^\circ - (125^\circ + 20^\circ) = 35^\circ$, 所以 $\angle E = \angle C = 35^\circ$.

刷有所得 4. (1) 【证明】 $\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ, \therefore \angle BAD + \angle DAC = \angle CAE + \angle DAC, \therefore \angle BAD = \angle CAE$. 又 $\because AB = AC, AD = AE, \therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS), $\therefore BD = CE, \therefore BC = BD + CD = CE + CD$.
【解】(2) 不成立, 存在的数量关系为 $CE = BC + CD$, 位置关系为 $CE \perp BC$. 理由如下:
 $\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ, \therefore \angle BAD = \angle CAE$. 又 $\because AB = AC, AD = AE, \therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS), $\therefore BD = CE, \angle ACE = \angle ABD$. $\because BD = BC + CD, \therefore CE = BC + CD$. $\because \angle BAC = 90^\circ, AB = AC, \therefore \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ, \therefore \angle ACE = \angle ABD = 45^\circ, \therefore \angle BCE = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ, \therefore CE \perp BC$.

(3) 存在的数量关系为 $CD = BC + CE$.
 $\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ, \therefore \angle BAD = \angle CAE$.
又 $\because AB = AC, AD = AE, \therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS),
 $\therefore BD = CE, \therefore CD = BC + BD = BC + CE$.

大招解读 | 一线三等角模型(K型)

三个相等的角在同一直线上,称为一线三等角模型(角度有锐角、钝角,若为直角则可称为一线三垂直),利用三等角关系可找到全等三角形所需的角相等条件(如 $\angle 1 = \angle 2$).



5. (1) 【证明】由题意得 $AC = BC$, $\angle ACB = 90^\circ$, $AD \perp DE$, $BE \perp DE$,

$$\therefore \angle ADC = \angle CEB = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle BCE = 90^\circ, \angle ACD + \angle DAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle DAC.$$

$$\text{在 } \triangle ADC \text{ 和 } \triangle CEB \text{ 中, } \begin{cases} \angle ADC = \angle CEB, \\ \angle DAC = \angle BCE, \\ AC = BC, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle CEB (\text{AAS}).$$

(2) 【解】由题意得 $AD = 3 \times 2 = 6$ (cm), $BE = 6 \times 2 = 12$ (cm).

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle CEB, \therefore EC = AD = 6 \text{ cm}, DC = BE = 12 \text{ cm}, \therefore DE = DC + CE = 18 \text{ cm}.$$

答:两堵木墙之间的距离为 18 cm.

6. 【解】(1) 因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 所以 $\angle B = \angle C = 60^\circ$. 因为 $\angle EDC = \angle B + \angle BED = \angle EDF + \angle FDC$, $\angle EDF = 60^\circ$, 所以 $\angle BED = \angle FDC$. 又因为 $BD = CF$, 所以 $\triangle BDE \cong \triangle CFD$ (AAS). 故答案为 $\triangle CFD$.

(2) 因为四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\text{所以 } AB = BC, \angle ABC = 90^\circ.$$

$$\text{因为 } AE \perp EF, CF \perp EF,$$

$$\text{所以 } \angle AEB = \angle CFB = 90^\circ = \angle ABC,$$

$$\text{所以 } \angle ABE + \angle BAE = 90^\circ = \angle ABE + \angle CBF,$$

$$\text{所以 } \angle BAE = \angle CBF,$$

$$\text{所以 } \triangle ABE \cong \triangle BCF (\text{AAS}),$$

$$\text{所以 } AE = BF = 1, BE = CF = 2, \text{所以 } EF = 3.$$

故答案为 3.

(3) 因为 $AD \perp CE$, $BE \perp CE$,

$$\text{所以 } \angle ADC = \angle BEC = 90^\circ.$$

$$\text{因为 } \angle DCA + \angle BCE = 90^\circ, \angle DCA + \angle DAC = 90^\circ, \text{所以 } \angle DAC = \angle BCE.$$

$$\text{又因为 } AC = BC,$$

$$\text{所以 } \triangle ACD \cong \triangle CBE (\text{AAS}),$$

关键点拨

从实际问题中抽象出数学模型, 正确找出证明三角形全等的条件.

思路分析

(1) (2) 延长 FD 到点 G , 使 $DG = BE$, 连接 AG , 即可证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$, 可得 $AE = AG$, 再证明 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$, 可得 $EF = FG$, 即可

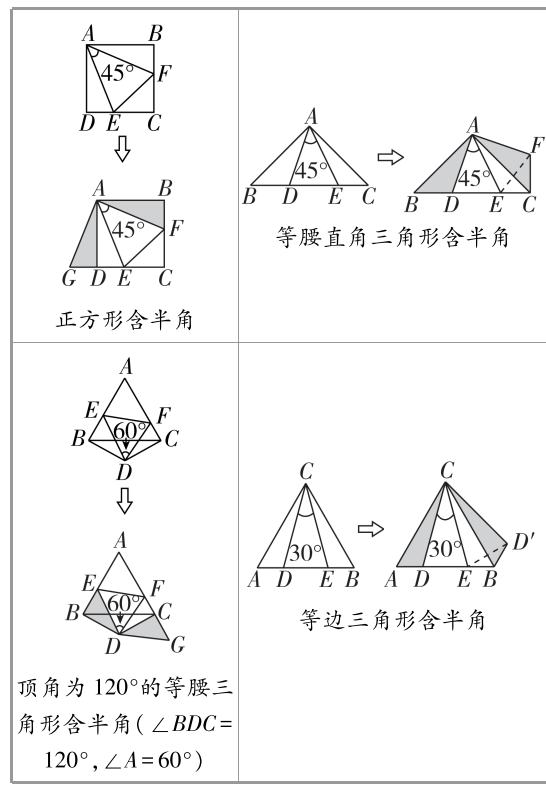
(3) 延长 DC 到点 G , 使 $CG = AE$, 连接 BG , 根据“SAS”可判定 $\triangle AEB \cong \triangle CGB$, 故可得出 $BE = BG$, $\angle ABE = \angle CBG$, 再由 $\angle EBF = 45^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$ 可得出 $\angle ABE + \angle CBF = 45^\circ$, 故 $\angle CBF + \angle CBG = 45^\circ$, 由“SAS”可判定 $\triangle EBF \cong \triangle GBF$, 故 $EF = GF$, 故 $\triangle DEF$ 的周长为 $EF + ED + DF = AE + CF + DE + DF = AD + CD$, 由此可得出答案.

$$\text{所以 } CE = AD = 6 \text{ cm}, CD = BE,$$

$$\text{所以 } BE = CD = CE - DE = 6 - 4 = 2 \text{ (cm)}.$$

大招解读 | 半角模型

半角模型中的重要元素: (1) 半角, (2) 邻边相等.



$$\begin{cases} BE = DG, \\ \angle B = \angle ADG, \\ AB = AD, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \triangle ABE \cong \triangle ADG (\text{SAS}),$$

$$\text{所以 } AE = AG, \angle BAE = \angle DAG.$$

$$\text{因为 } \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD, \text{所以 } \angle GAF = \angle DAG +$$

$$\angle DAF = \angle BAE + \angle DAF = \angle BAD - \angle EAF = \angle EAF, \text{所以 } \angle EAF = \angle GAF. \text{在 } \triangle AEF \text{ 和}$$

$$\triangle AGF \text{ 中, } \begin{cases} AE = AG, \\ \angle EAF = \angle GAF, \text{所以 } \triangle AEF \cong \\ AF = AF, \end{cases}$$

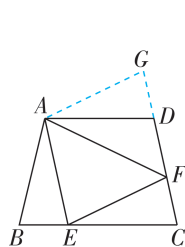
$$\triangle AGF (\text{SAS}), \text{所以 } EF = FG. \text{因为 } FG = DG + DF = BE + DF, \text{所以 } EF = BE + DF. \text{故答案为 } EF = BE + DF.$$

(2) 结论 $EF = BE + DF$ 仍然成立. 理由: 如图 (1), 延长 FD 到点 G , 使 $DG = BE$, 连接 AG . 因为 $\angle B + \angle CDA = 180^\circ$, $\angle ADG + \angle CDA = 180^\circ$, 所以 $\angle B = \angle ADG$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADG$ 中,

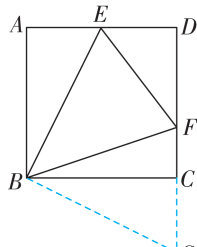
$$\begin{cases} BE = DG, \\ \angle B = \angle ADG, \text{所以 } \triangle ABE \cong \triangle ADG (\text{SAS}), \text{所以} \\ AB = AD, \end{cases}$$

$$\text{以 } AE = AG, \angle BAE = \angle DAG. \text{因为 } \angle EAF =$$

$\frac{1}{2}\angle BAD$, 所以 $\angle GAF = \angle DAG + \angle DAF = \angle BAE + \angle DAF = \angle BAD - \angle EAF = \angle EAF$, 所以 $\angle EAF = \angle GAF$. 在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AGF$ 中, $\begin{cases} AE=AG, \\ \angle EAF = \angle GAF, \end{cases}$ 所以 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$ (SAS), $AF=AF$, 所以 $EF=FG$. 因为 $FG=DG+DF=BE+DF$, 所以 $EF=BE+DF$.



图(1)



图(2)

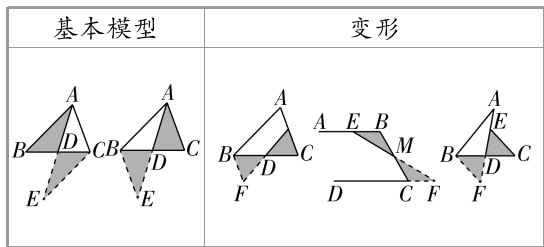
(3) $\triangle DEF$ 的周长是 10. 如图(2), 延长 DC 到点 G , 使 $CG=AE$, 连接 BG . 因为四边形 $ABCD$ 是正方形, 所以 $\angle A = \angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$, $AB=BC$. 在 $\triangle AEB$ 与 $\triangle CGB$ 中, $\begin{cases} AE=CG, \\ \angle A = \angle BCG, \\ AB=CB, \end{cases}$ 所以 $\triangle AEB \cong \triangle CGB$ (SAS), 所以 $BE=BG$, $\angle ABE = \angle CBG$. 因为 $\angle EBF = 45^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$, 所以 $\angle ABE + \angle CBF = 45^\circ$, 所以 $\angle CBF + \angle CBG = 45^\circ$. 在 $\triangle EBF$ 与 $\triangle GBF$ 中, $\begin{cases} BE=BG, \\ \angle EBF = \angle GBF, \\ BF=BF, \end{cases}$ 所以 $\triangle EBF \cong \triangle GBF$ (SAS), 所以 $EF=GF$, 所以 $\triangle DEF$ 的周长为 $EF+ED+DF=AE+CF+DE+DF=AD+CD=5+5=10$.

大招专题 2 构造全等三角形的常用方法

刷难关

大招解读 | 倍长中线法

倍长中线法, 就是将三角形的中线延长一倍, 以便构造出全等三角形, 从而运用全等三角形的有关知识来解决问题.



1. 【证明】如图, 延长 AD 至 M , 使 $DM=AD$, 连接 CM .

因为 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, 所以 $BD=CD$.

刷有所得

倍长中线的目的是构造全等三角形中的 8 字型, 从而根据全等三角形的性质将边或角进行转化.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle MCD$

$$\begin{cases} BD=CD, \\ \angle ADB = \angle MDC, \\ AD=MD, \end{cases}$$

所以 $\triangle ABD \cong \triangle MCD$ (SAS), 所以 $MC=AB$, $\angle B = \angle MCD$.

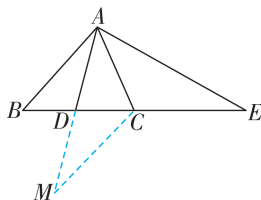
因为 $AB=CE$, 所以 $CM=CE$.

因为 $\angle BAC = \angle BCA$, 所以 $\angle B + \angle BAC = \angle ACB + \angle MCD$, 即 $\angle ACE = \angle ACM$.

$$\begin{cases} AC=AC, \\ \angle ACE = \angle ACM, \\ CE=CM, \end{cases}$$

所以 $\triangle ACE \cong \triangle ACM$ (SAS), 所以 $AE=AM$.

因为 $AM=2AD$, 所以 $AE=2AD$.



关键点拨

2. 【解】(1) 如图(1), 延长

AD 到 E , 使得 $DE=AD$, 连接 BE , 则 $AE=2AD$.

$\because D$ 是 BC 的中点,

$\therefore BD=CD$. 在 $\triangle ACD$ 和

$$\triangle EBD \text{ 中, } \begin{cases} CD=BD, \\ \angle ADC = \angle EDB, \\ AD=DE, \end{cases} \therefore \triangle ACD \cong \triangle EBD \text{ (SAS), } \therefore BE=AC.$$

在 $\triangle ABE$ 中, 由三角形的三边关系可得 $AB-BE < AE < AB+BE$, 即 $AB-BE < 2AD < AB+BE$. $\because AB=9, AC=BE=5$, $\therefore 9-5 < 2AD < 9+5$, $\therefore 2 < AD < 7$, $\therefore BC$ 边上的中线 AD 的取值范围为 $2 < AD < 7$.

(2) $EF=2AD$ 且 $EF \perp AD$. 证明如下: 如图

(2), 延长 AD 到 G , 使得

$AD=DG$, 连接 BG , 延长

DA 交 EF 于点 H . 同(1)

可证 $\triangle ACD \cong \triangle GBD$,

$\therefore AC=BG$, $\angle DAC =$

$\angle DGB$, $\therefore \angle BAC =$

$\angle BAD + \angle DAC = \angle BAD + \angle DGB$, $\therefore \angle ABG +$

$\angle BAD + \angle DGB = \angle ABG + \angle BAC = 180^\circ$.

$\therefore \angle BAE = \angle FAC = 90^\circ$, $\therefore \angle EAF + \angle BAC =$

180° , $\therefore \angle EAF = \angle ABG$. $\because AC=AF$, $AC=BG$,

$\therefore BG=AF$. 在 $\triangle ABG$ 和 $\triangle EAF$ 中,

$\begin{cases} AB=AE, \\ \angle ABG = \angle EAF, \end{cases} \therefore \triangle ABG \cong \triangle EAF$ (SAS),

$BG=AF$,

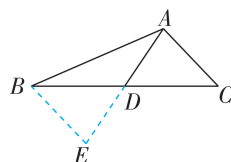
$\therefore EF=AG$, $\angle HEA = \angle BAG$. $\because AG=2AD$,

$\therefore EF=2AD$. $\because \angle BAE = 90^\circ$, $\therefore \angle EAH +$

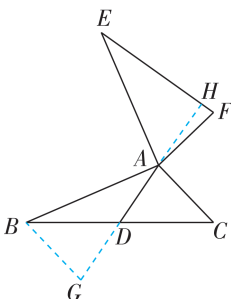
$\angle BAG = 90^\circ$. $\therefore \angle HEA = \angle BAG$, $\therefore \angle HEA +$

$\angle EAH = 90^\circ$, $\therefore \angle AHE = 90^\circ$, $\therefore AD \perp EF$. 综上所述,

$EF=2AD$ 且 $EF \perp AD$.



图(1)

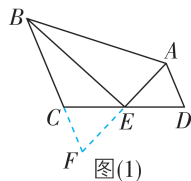


图(2)

大招解读 | 截长补短法

“截长补短法”的具体做法:在某一条线段上截取一条线段与特定线段相等,或将某条线段延长,使之与特定线段相等,再利用三角形全等的有关性质加以说明.当题目中出现线段和差关系时,一般都可以用“截长补短法”求解.

- 3.【证明】补短法:如图(1),延长 BC 至点 F ,使 $AB=BF$,连接 EF . 因为 $AD \parallel CB$, 所以 $\angle CBA + \angle BAD = 180^\circ$. 因为 BE 平分 $\angle CBA$, AE 平分 $\angle BAD$, 所以 $\angle ABE = \angle EBF$, $\angle BAE = \angle DAE$, 所以 $\angle EBA + \angle BAE = 90^\circ$, 所以 $\angle BEA = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

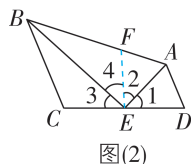


图(1)

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FBE$ 中, $\begin{cases} AB=BF, \\ \angle ABE=\angle FBE, \\ BE=BE, \end{cases}$ 所以 $\triangle ABE \cong \triangle FBE$ (SAS), 所以 $\angle BEA = \angle BEF = 90^\circ$, $AE = FE$, 所以 A, E, F 三点共线. 因为 $AD \parallel CB$, 所以 $\angle EAD = \angle F$.

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle FCE$ 中, $\begin{cases} \angle EAD = \angle F, \\ AE=FE, \\ \angle AED = \angle FEC, \end{cases}$ 所以 $\triangle ADE \cong \triangle FCE$ (ASA), 所以 $AD = CF$, 所以 $AB = BC + CF = BC + AD$.

截长法:如图(2),在 AB 上截取 $AF = AD$, 连接 EF . 因为 $AD \parallel BC$, 所以 $\angle ABC + \angle DAB = 180^\circ$. 又因为 BE 平分 $\angle ABC$, AE 平分 $\angle DAB$, 所以 $\angle ABE + \angle EAB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle DAB) = 90^\circ$, 所以 $\angle AEB = 90^\circ$, 即 $\angle 2 + \angle 4 = 90^\circ$. 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle AFE$ 中, $\begin{cases} AD=AF, \\ \angle DAE = \angle FAE, \\ AE=AE, \end{cases}$ 所以 $\triangle ADE \cong \triangle AFE$ (SAS), 所以 $\angle 1 = \angle 2$. 又因为 $\angle 2 + \angle 4 = 90^\circ$, 所以 $\angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$, 所以 $\angle 3 = \angle 4$.



图(2)

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle BFE$ 中, $\begin{cases} \angle CBE = \angle FBE, \\ BE=BE, \\ \angle 3 = \angle 4, \end{cases}$ 所以 $\triangle BCE \cong \triangle BFE$ (ASA), 所以 $BC = BF$, 所以 $AB = AF + BF = AD + BC$.

- 4.【证明】在 AB 上截取 $BM = BD$, 连接 EM , 如图. $\because BE$ 平分 $\angle ABC$, $\therefore \angle MBE = \angle DBE$. 在 $\triangle MBE$ 和 $\triangle DBE$ 中, $\begin{cases} BM=BD, \\ \angle MBE=\angle DBE, \\ BE=BE, \end{cases}$

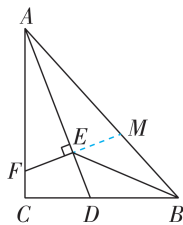
思路分析

由于 AB 与 AD 和 BC 之间没有什么直接的联系, 所以必须通过作辅助线建立 AB 与 AD 和 BC 之间的联系, 进而求解. 可以在 AB 上截取 $AF=AD$, 连接 EF , 证明 $\triangle BCE \cong \triangle BFE$; 也可延长 BC 至点 F , 使 $AB=BF$, 连接 EF , 证明 $\triangle ADE \cong \triangle FCE$, 进而得出三条线段之间的关系.

刷有所得

截长法和补短法可以根据题目条件灵活应用.

$\therefore \triangle MBE \cong \triangle DBE$ (SAS),
 $\therefore \angle BME = \angle BDE$.
 $\therefore EF \perp AE$,
 $\therefore \angle FED = 90^\circ = \angle ACB$,
 $\therefore \angle EFC + \angle ADC = 180^\circ$.
 $\therefore \angle BDE + \angle ADC = 180^\circ$,
 $\therefore \angle EFC = \angle BDE$, $\therefore \angle EFC = \angle BME$,
 $\therefore \angle AFE = \angle AME$.
 $\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$, $\therefore \angle FAE = \angle MAE$.

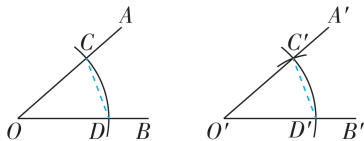


在 $\triangle FAE$ 和 $\triangle MAE$ 中, $\begin{cases} \angle FAE = \angle MAE, \\ \angle AFE = \angle AME, \\ AE=AE, \end{cases}$
 $\therefore \triangle FAE \cong \triangle MAE$ (AAS), $\therefore AF = AM$,
 $\therefore AF + BD = AM + BM = AB$.

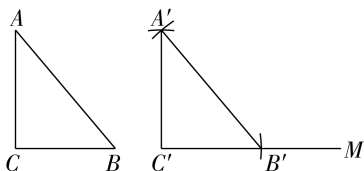
13.4 三角形的尺规作图

刷基础

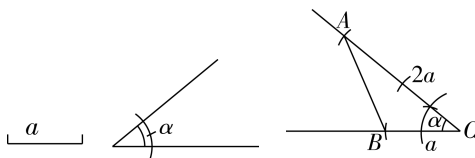
1. A 【解析】如图, 连接 $CD, C'D'$. 由作法可得 $OD = O'D' = OC = O'C'$, $CD = C'D'$. 在 $\triangle OCD$ 和 $\triangle O'C'D'$ 中, $\begin{cases} CD=C'D', \\ OD=O'D', \\ OC=O'C', \end{cases}$ $\therefore \triangle OCD \cong \triangle O'C'D'$ (SSS), 故选 A.



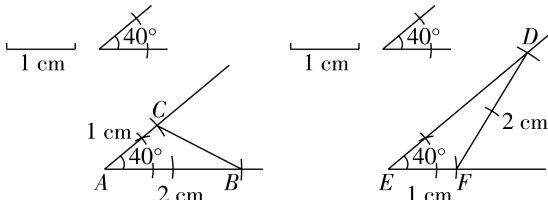
2. 【解】如图, $\triangle A'B'C'$ 即为所求.



3. 【解】如图所示, $\triangle ABC$ 即为所求作的三角形.



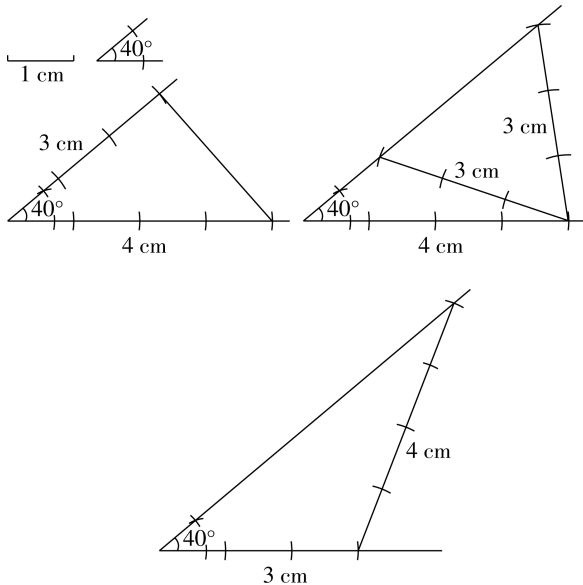
4. 【解】(1) 如图(1), $\triangle ABC$ 即为所作.



图(1)

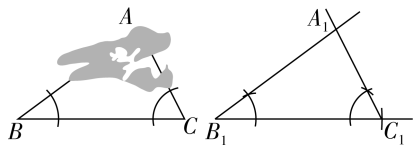
图(2)

- (2) 能. 如图(2), $\triangle EDF$ 即为所作. (注: (1) 所作三角形可互换)
 (3) 如图(3), 共有 4 个. 故答案为 4.



图(3)

5. 【解】如图, $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求.



全章综合训练

刷中考

1. A 【解析】

- A 命题一定有逆命题,本选项说法正确
- B 不是所有的定理都有逆定理,例如“全等三角形的对应角相等”,没有逆定理,故本选项说法错误
- C 真命题的逆命题不一定是真命题,故本选项说法错误
- D 假命题的逆命题不一定是假命题,例如假命题“对应角相等的三角形全等”,其逆命题是真命题,故本选项说法错误

关键点拨

(3) 以 3 cm 和 4 cm 所夹的角为 40° 画三角形或以 40° 的角所对的边为 3 cm 画三角形或以 40° 的角所对的边为 4 cm 画三角形.

关键点拨

此题中三角形可以确定两个角及其夹边,因此要先画出和 BC 相等的线段,通过“ASA”来作全等三角形.

2. 假 【解析】 $\because a > b, \therefore a - 3 > b - 3, \therefore$ “若 $a > b$, 则 $a - 3 < b - 3$ ”是假命题,故答案为假.
3. C 【解析】 \because 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ, \angle B = 40^\circ, \therefore \angle ACB = 180^\circ - \angle A - \angle B = 80^\circ. \therefore \triangle ABC \cong \triangle DEC, \therefore \angle DCE = \angle ACB = 80^\circ$. 故选 C.
4. $DE = EF$ (答案不唯一) 【解析】 $\because CF \parallel AB, \therefore \angle A = \angle ECF, \angle ADE = \angle CFE, \therefore$ 添加条件 $DE = EF$, 可以使得 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$ (AAS). 故答案为 $DE = EF$ (答案不唯一).
5. 3 【解析】 $\because \angle BAC = 90^\circ, \therefore \angle EAB + \angle EAC = 90^\circ. \because BE \perp AD, CF \perp AD, \therefore \angle AEB = \angle AFC = 90^\circ, \therefore \angle ACF + \angle EAC = 90^\circ, \therefore \angle ACF = \angle BAE.$

$$\begin{cases} \angle CFA = \angle AEB, \\ \angle ACF = \angle BAE, \\ AC = AB, \end{cases}$$
 $\therefore \triangle AFC \cong \triangle BEA$ (AAS), $\therefore AF = BE = 4, AE = CF = 1, \therefore EF = AF - AE = 4 - 1 = 3$, 故答案为 3.
6. 【证明】在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 50^\circ, \angle C = 20^\circ, \therefore \angle CAB = 180^\circ - \angle B - \angle C = 110^\circ. \therefore AE \perp BC, \therefore \angle AEC = 90^\circ, \therefore \angle DAF = \angle AEC + \angle C = 110^\circ, \therefore \angle DAF = \angle CAB.$

$$\begin{cases} AD = AC, \\ \angle DAF = \angle CAB, \\ AF = AB, \end{cases}$$
 $\therefore \triangle DAF \cong \triangle CAB$ (SAS), $\therefore DF = CB.$
7. A 【解析】由作图方法可知判定 $\triangle C'O'D' \cong \triangle COD$ 的依据是三边分别相等的两个三角形全等, 故选 A.

第十四章 实数

14.1 平方根

课时 1 平方根

刷基础

1. D 【解析】 $\because (\pm 2)^2 = 4, \therefore 4$ 的平方根是 ± 2 , 故选 D.

2. C 【解析】“ $\frac{25}{64}$ 的平方根是 $\pm \frac{5}{8}$ ”可表示为 $\pm \sqrt{\frac{25}{64}} = \pm \frac{5}{8}$. 故选 C.

刷有所得

一个正数有两个平方根, 它们互为相反数.

3. B 【解析】4 的平方根是 ± 2 , 故 -2 是 4 的一个平方根, 故①正确; 5 的平方根是 $\pm \sqrt{5}$, 故②错误; $(-2)^2 = 4$, 4 的平方根是 ± 2 , 所以 $(-2)^2$ 的平方根是 ± 2 , 故③错误; $\pm \sqrt{3}$ 是 3 的平方根, 故④正确. 故正确的是①④. 故选 B.
4. $\pm 2.5 \pm \frac{9}{2}$ 【解析】因为 $(\pm 2.5)^2 = (-2.5)^2$, 所以 $(-2.5)^2$ 的平方根是 ± 2.5 . 因为 $(\pm \frac{9}{2})^2 = 20 \frac{1}{4}$, 所以 $20 \frac{1}{4}$ 的平方根是 $\pm \frac{9}{2}$.